Épreuve de Maths	Royaume du Maroc	Examen National du
Filières : SMA - SMB	Ministère de l'Education Nationale	BACCALAURÉAT
Coefficient : 9	De la Formation professionnelle	Session Rattrapage
Durée : 4 heures	de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	Juillet 2004

Exercice Numéro 1 : (02,50 points)

Une urne contient dix boules blanches et dix boules rouges indiscernable au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne ; si elle est rouge on la remet dans l'urne, et si elle est blanche on la substitue par trois boules rouges à rajouter dans l'urne à la place de la boule blanche exclue. Puis on tire une boule de l'urne.

0,50 **1** Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

0,50 **2** Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

0,75 **3** Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

0,75 **4** Calculer la probabilité d'obtenir la $1^{ère}$ boule tirée étant blanche sachant que la $2^{ème}$ est de couleur blanche.

Exercice Numéro 2 : (03,00 points)

0,75 **1** Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $3x-2y=1$.

0,25 **2 a** Montrer que le couple $(14n+3\ ;\ 21n+4)$ est une solution de l'équation (E) ; $avec\ \ n\epsilon\mathbb{N}$.

0,50 **b** En déduire que les nombres $(21n+4)\ et\ (14n+3)$ sont premiers entre eux.

0,50 **3 a** Soit : $d=(21n+4)\wedge(2n+1)$, Montrer que : $d=1\quad oubien\quad d=13$.

0,25 **b** Montrer l'équivalence suivante : $d=13\quad\Leftrightarrow\quad n\equiv 6\,[13]$.

4 On pose : $(\forall n\geq 2)$; $A=21n^2-17n-4\quad et\quad B=28n^3-8n^2-17n-3$.

0,25 **a** Montrer que les nombres A et B sont divisibles par $(n-1)$.

0,50 **b** Déterminer en fonction de n le $PGCD(A,B)$.

Exercice Numéro 3 : (04,00 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

Soit : $(H)=\left\{M(z)\ ;\ z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2\ ;\ a=\alpha+i\beta\neq 0\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

0,50 **1 a** Déterminer la nature de l'ensemble (H).

0,50 **b** Tracer l'ensemble (H) dans le cas où $a=1+i$.

2 Soit : $(\mathcal{C})=\left\{M(z)\in(\mathcal{P})\ ;\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}\right\}$.

0,75 **a** Déterminer la nature de l'ensemble $(\mathcal{C})$.

0,25 **b** Tracer l'ensemble $(\mathcal{C})$ dans le cas où $a=1+i$.

3 On considère le système suivant : $(S)\ :\ \begin{cases} z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}\end{cases}$.

0,75 **a** Montrer que si on pose $u=z-a$ alors le système (S) est équivalent à :

$$(S')\ :\ \begin{cases} u\bar{u}=4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3-8a(\bar{a})^2)=0\end{cases}$$

0,75 **b** Soit : $a=r\,e^{i\theta}\ ;\ r>0\ ;\ -\pi\leq\theta\leq\pi$

Déterminer en fct de r et θ les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (H).

0,50 **c** En déduire que l'intersection de $(\mathcal{C})$ et (H) contient trois points qui forment un triangle équilatéral.

Exercice Numéro 4 : (10,50 points)

I Soient f et g les fonctions numériques définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=4x\,e^{-x\ln 2}-2 \qquad ; \qquad g(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$$

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$ les courbes représentatives des fonctions f et g resp dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=4cm$.

0,75 **1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

0,50 **b** Déterminer les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,75 **2 a** Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=4(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$.

0,75 **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

En déduire que 1 et 2 sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$.

0,75 **3** Étudier les branches infinies et la monotonie de la fonction g .

0,50 **4** Tracer les courbes $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{T})$ dans le même repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II On considère l'équation (E) : $g(x) = k \quad avec \quad 0 < k < \frac{2}{e}$.

0,75 **1** **a** Vérifier graphiquement que l'équation (E) admet deux solutions α *et* β tels que : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.

0,75 **b** Déterminer la valeur de k pour laquelle on ait : $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

2 Soit f_k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = 4x\, e^{-kx} - 2$

0,50 **a** Vérifier que : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $f_k^{'}(x) = 4(1 - kx)\, e^{-kx}$.

0,50 **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f_k .

0,50 **3** **a** En déduire que l'équation $f_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions a *et* b tels que : $a < \frac{1}{k} < b$.

0,75 **b** Montrer que : $a = \alpha \quad et \quad b = \beta$.

0,75 **4** **a** En utilisant une intégration par parties, Montrer que :

$$\forall\, t \,\epsilon\, \mathbb{R} \quad ; \quad \int_0^t x\, e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k^2}\left(1 - kt\, e^{-kt} - e^{-kt}\right)$$

0,75 **b** Calculer l'intégrale $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)\, dx$ en fonction de α *et* β .

0,50 **c** En déduire que : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$.

0,75 **5** Montrer que : $\forall\, u, v \,\epsilon\, \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \frac{\ln u}{u} = \frac{\ln v}{v} \quad \Longrightarrow \quad \ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$